

**Radosław NOWAK, Marek PIETRZAKOWSKI**

Politechnika Warszawska, IPBM, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa

E-mail: rnowak@simr.pw.edu.pl, mpi@simr.pw.edu.pl

## **Symulacyjne badanie efektywności belkowego generatora piezoelektrycznego**

### 1 Wstęp

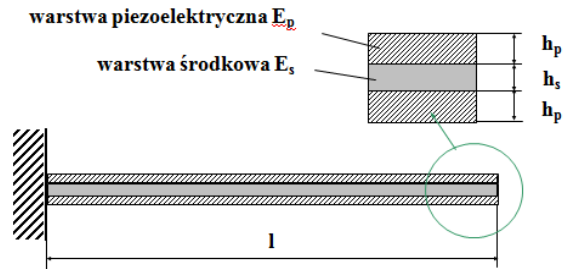
Przetworniki piezoelektryczne znalazły szerokie zastosowanie w układach sterowania jako elementy pomiarowe i wykonawcze, a także jako generatory w układach pozyskiwania energii elektrycznej z drgań mechanicznych, których źródłem jest otoczenie. W technice przetwarzania energii popularne są generatory belkowe złożone z warstw piezoelektrycznych przedzielonych warstwą wzmacniającą, najczęściej metalową. Obok prostoty budowy ich zaletą jest łatwość dostrojenia do zakresu częstotliwości oddziaływań zewnętrznych, a tym samym zapewnienie efektywnej pracy generatora w strefie największych odkształceń elementów piezoelektrycznych. W projektowaniu tego typu generatorów ważny jest także odpowiedni dobór parametrów geometrycznych i materiałowych, co ma znaczny wpływ na poziom sprzężenia elektromechanicznego [1, 2]. W niniejszym artykule skoncentrowano się na modelowaniu i badaniu właściwości generatora belkowego składającego się z warstw piezoelektrycznych i wzmacniającej warstwy środkowej. Wykazano możliwość zwiększenia efektywności przemiany energii mechanicznej w energię elektryczną przez odpowiedni dobór grubości i sztywności warstw.

### 2 Rozpatrywany układ

Badany układ jest trójwarstwową belką wysięgnikową, w której warstwy zewnętrzne, w przeciwieństwie do stalowej warstwy środkowej, wykazują właściwości piezoelektryczne. Na obecnym etapie rozważania ograniczono się do wymuszenia statycznego w postaci zadanego ugięcia swobodnego końca belki. Obliczenia wykonano metodą analityczną oraz metodą elementów skończonych (MES), przy czym w symulacjach MES zastosowano dwa rodzaje modeli: płaski i przestrzenny.

Podejście statyczne, choć odmienne od rzeczywistych warunków pracy generatora piezoelektrycznego, umożliwia weryfikację modeli MES, a także sformułowanie ogólnych wniosków dotyczących wpływu parametrów geometrycznych i materiałowych na efektywność transformacji energii.

Schemat rozpatrywanego układu pokazano na rysunku 1. Symbole  $E_p$  i  $h_p$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i grubość warstwy piezoelektrycznej. Analogicznie symbole  $E_s$ ,  $h_s$  odnoszą się do warstwy środkowej.



Rys. 1. Schemat badanego układu  
Fig. 1. Investigated system scheme

Jak wspomniano wyżej, program badań obejmuje wyznaczenie wpływu sztywności oraz grubości warstw belki na poziom generowanej energii elektrycznej, porównanie uzyskanych wyników z otrzymanymi na podstawie analizy teoretycznej, a także wskazanie optymalnej konfiguracji wymienionych wyżej parametrów geometrycznych i materiałowych.

### 3 Rozwiązanie analityczne

W celu sprawdzenia poprawności modelowania MES zaproponowano uproszczone rozwiązanie analityczne. Generowane napięcie w przypadku statycznego przemieszczenia swobodnego końca belki wysięgnikowej obliczono na podstawie następującej zależności (por. [4]):

$$V_p = -C_p \int_0^l \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} b dx, \quad (1)$$

w której:  $V_p$  – generowane napięcie,  $C_p$  – stała elementu piezoelektrycznego,  $y(x)$  – funkcja opisująca linię statycznego ugięcia belki,  $l$  i  $b$  – odpowiednio długość i szerokość belki.

Stałą elementu piezoelektrycznego, zależną od parametrów geometrycznych i materiałowych, określono ograniczając się do prostego efektu piezoelektrycznego wzorem (2):

$$C_p = d_{31} E_p \frac{(h_s + h_p)}{2c}, \quad (2)$$

gdzie:  $d_{31}$  – stała piezoelektryczna,  $c$  – pojemność elektryczna warstwy piezoelektrycznej,  $c = A_p e_{33} / h_p$ , przy czym  $A_p$  jest efektywną powierzchnią elektrody,  $e_{33}$  jest przenikalnością dielektryczną.

Linię ugięcia belki wysięgnikowej w funkcji ugięcia jej swobodnego końca  $y(l)$  wyznaczono na podstawie znanych z wytrzymałości materiałów metod i przedstawiono w postaci:

$$y(x) = \frac{y(l)x^2}{2l^2} \left(3 - \frac{x}{l}\right). \quad (3)$$

Drugą, obok generowanego napięcia, porównywaną wielkością jest stosunek pozyskiwanej energii elektrycznej do energii mechanicznej układu.

Energję elektryczną wytwarzaną przez obie warstwy piezoelektryczne obliczono ze wzoru:

$$U_E = V_p^2 c . \quad (4)$$

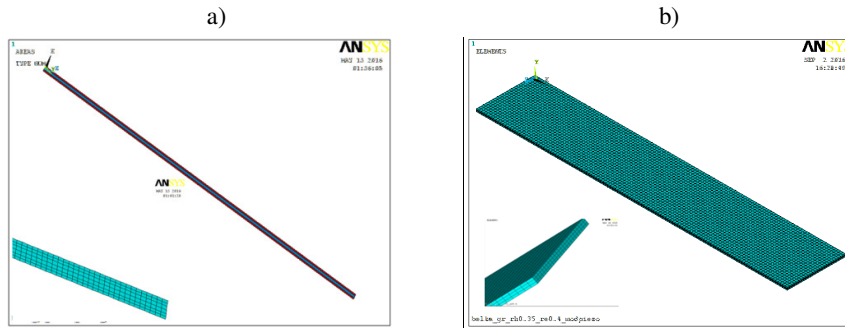
Do wyznaczenia energii mechanicznej zastosowano następującą zależność:

$$U_m = \frac{3EIy^2(l)}{2l^3} . \quad (5)$$

Sztywność zginania  $EI$  podana we wzorze (5) jest sztywnością zastępczą trójwarstwowej belki kompozytowej złożonej z warstw piezoelektrycznych i warstwy środkowej (por. [5]). W obliczeniach uwzględniono moduły Younga materiału warstw oraz momenty bezwładności przekrojów poszczególnych warstw względem powierzchni środkowej.

#### 4 Budowa modeli MES

Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych w środowisku ANSYS [6]. W celu porównawczym zbudowano dwa rodzaje modeli MES: model bryłowy i model płaski (rys. 2). W modelu bryłowym rdzeń belki utworzono z elementów Solid95, a warstwy piezoelektryczne z elementów Solid226 z dodatkowymi elektrycznymi stopniami swobody. Model płaski zbudowano odpowiednio z elementów Plane183 i Plane223. Wszystkie elementy, z których zbudowano modele, mają kwadratową funkcję kształtu. Podczas nakładania siatki każda z warstw belki została podzielona w połowie grubości, co zapewnia symetryczny podział względem powierzchni obojętnej. Zakładając poprzeczną polaryzację warstw piezoelektrycznych, utworzono wirtualne elektrody na zewnętrznych powierzchniach piezoelementów. W tym celu połączono elektryczne stopnie swobody odpowiednich węzłów. Liczba węzłów modelu płaskiego jest dwunastokrotnie mniejsza niż w przypadku modelu bryłowego, co znacznie skraca czas obliczeń. Modele MES i model analityczny zbudowano przy wykorzystaniu tych samych parametrów geometrycznych i materiałowych. Zmianie ulegał stosunek grubości warstw piezoelektrycznych do całkowitej stałej grubości belki generatora. Przeprowadzono obliczenia o charakterze statycznym przy wymuszeniu warunkiem brzegowym – stałym przemieszczeniem swobodnego końca belki.



Rys. 2. Model MES belki zbudowany z elementów płaskich a) i bryłowych b)  
 Fig. 2. The FEM model using plane a) and solid b) type of the elements

Na rysunku 2 pokazano modele MES oraz siatkę zbudowaną odpowiednio z płaskich (2a)) i bryłowych elementów (2b)).

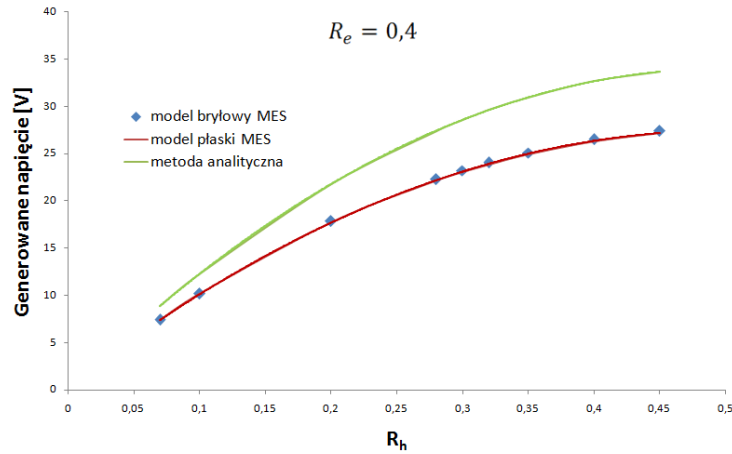
## 5 Wyniki

Wykonano obliczenia metodą elementów skończonych i uproszczoną metodą analityczną. W symulacjach MES skorzystano z modeli płaskich i bryłowych. Wyniki zestawiono w postaci wykresów zależności generowanego napięcia od współczynnika  $R_h$  (rys. 3). Współczynnik  $R_h$  jest zdefiniowany jako stosunek grubości warstwy piezoelektrycznej  $h_p$  do całkowitej grubości belki  $h_c = h_s + 2h_p$ .

Tabela 1. Właściwości materiałowe

Właściwości materiałowe	Warstwa środkowa	Warstwa piezoelektryczna
Moduł Younga (Pa)	$E_s = 2,1 \cdot 10^{11}$	$R_e \cdot E_s$
Liczba Poissona	0,3	0,33
Gęstość ( $\text{kg/m}^3$ )	7800	7280
Stała $d_{31}$ (m/V)		$1,90 \cdot 10^{-10}$
Przenikalność dielektryczna próżni $\epsilon_0$ (F/m)		$8,85 \cdot 10^{-12}$
Względna przenikalność dielektryczna $\epsilon_{33} / \epsilon_0$		1695

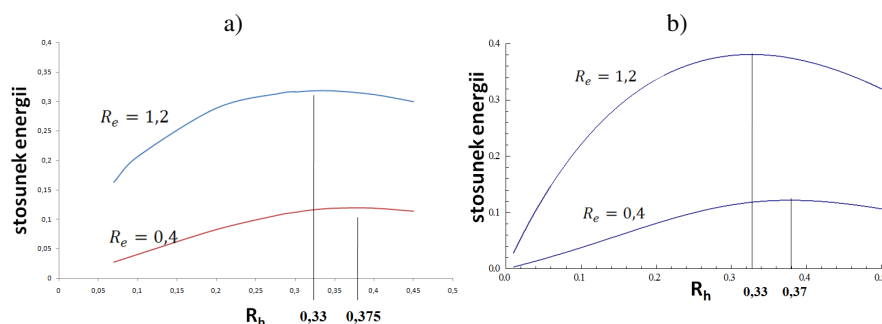
Parametr  $R_e$  określa stosunek modułów Younga odpowiednio warstwy piezoelektrycznej do warstwy środkowej ( $R_e = E_p/E_s$ ).



Rys. 3. Porównanie wartości generowanego napięcia w zależności od stosunku grubości warstw belki. Modele MES i model analityczny

Fig. 3. Comparison of the generated voltage depending on the beam layers thickness ratio. The FEM models and the analytical model

Na rysunku 3 przedstawiono krzywe zależności generowanego napięcia od współczynnika  $R_h$ . Obliczenia wykonano przy założeniu stałej wartości parametru  $R_e$  równej 0,4. Linia przerywaną zaznaczono wartości generowanego napięcia w przypadku obliczeń metodą analityczną. Natomiast linią ciągłą i rombami oznaczono wyniki uzyskane metodą elementów skończonych, stosując odpowiednio model płaski i model bryłowy. Różnice w otrzymanych wynikach między modelami MES wynoszą maksymalnie 1%, dlatego też zdecydowano się użyć elementów płaskich w dalszych badaniach symulacyjnych. Większe wartości generowanego napięcia uzyskane metodą analityczną spowodowane są uproszczeniami modelu, w tym nieuwzględnieniem sprzężenia elektromechanicznego. Jednak w przypadku obu metod obliczeniowych przebieg krzywych jest zbliżony.



Rys. 4. Przebiegi stosunku energii elektrycznej do mechanicznej w zależności od stosunku grubości warstw belki. MES a) i metoda analityczna b)

Fig. 4. Relations between the electrical to the mechanical energy and the beam layers thickness ratio. FEM a) and analytical method b)

Pokazane na rysunku 4 krzywe reprezentują zależność stosunku energii elektrycznej do mechanicznej od parametru  $R_h$  (por. [3]). Obliczenia wykonano dla dwóch wartości stosunku sztywności warstw  $R_e$  przy założeniu stałego modułu Younga warstwy środkowej. Energia elektryczna generowana przez każdą z warstw piezoelektrycznych została wyznaczona jako połowa iloczynu kwadratu napięcia i pojemności elektrycznej warstwy. Natomiast energię mechaniczną określono jako równą pracy, którą należy wykonać w celu przemieszczenia swobodnego końca belki o założoną stałą wartość równą 0,2 mm. Krzywe uzyskane w wyniku obliczeń metodą analityczną (rys. 4b) mają większą wartość ekstremum niż krzywe wykonane na podstawie wyników z MES (rys. 4a). Podobnie jak w przypadku generowanego napięcia, rozbieżność ta wynika z zastosowanych uproszczeń w modelu analitycznym. Należy podkreślić, że niezależnie od stosowanej metody obliczeniowej największa wartość generowanej energii elektrycznej występuje przy zbliżonych wartościach parametru  $R_h$ .

## 6 Wnioski

W pracy zbadano generator w postaci belki wysięgnikowej, składającej się z zewnętrznych warstw piezoelektrycznych i konwencjonalnej stalowej warstwy środkowej. Obliczenia przeprowadzono metodą elementów skończonych i metodą analityczną. Zbadano wpływ grubości oraz sztywności warstw belki na poziom generowanego napięcia i wartość pozyskiwanej energii elektrycznej. Porównano wyniki otrzymane metodą analityczną i MES.

Na podstawie obliczeń metodą elementów skończonych wykazano, że błąd względny między wartościami generowanego napięcia otrzymanymi przy użyciu modeli bryłowych i modeli płaskich wynosi ok. 1%. Zaproponowano uproszczony model analityczny, w którym nie uwzględniono efektu sprzężenia elektromechanicznego. Stąd też różnice w wartościach generowanego napięcia otrzymanych metodą analityczną i MES. Zauważalna jest tendencja do zwiększania się tej różnicy wraz ze wzrostem grubości warstw piezoelektrycznych.

Wyznaczone dwiema metodami zależności energii elektrycznej od stosunku grubości warstw mają także podobny przebieg i wartości, przy których występuje ekstremum generowanej energii elektrycznej.

Na podstawie otrzymanych wyników wykazano możliwość zwiększenia efektywności pozyskiwania energii elektrycznej przez odpowiedni dobór parametrów geometrycznych i materiałowych generatora.

### Bibliografia

1. Aronov B.: On the optimization of the effective electromechanical coupling coefficients of a piezoelectric body. *J. Acoust. Soc. Am.* 114 (2), 2003, 792-800
2. Neubauer M.: Optimal design of piezoelectric actuators for shunt damping techniques. *Archives of Acoustics*, vol.39, no 4, 2014, 615-6223.
3. Nowak R., Pietrzakowski M.: Wpływ parametrów konstrukcyjnych na efektywność belkowego generatora piezoelektrycznego. *XXII Warsztaty Naukowe PTSK*, Materiały konferencyjne, Szymbark 2015
4. Pietrzakowski. M.: Active vibration control of one-dimensional piezoelectric laminates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 3,31, 1993, pp. 637-655
5. Whitney J. M.: *Structural analysis of laminated anisotropic plates*, Technomic Publishing Co.Inc., Lancaster 1987
6. Release 11.0 *Documentation for ANSYS*, ANSYS Ltd. 2

### Streszczenie

Rozważania dotyczą układu pozyskiwania energii elektrycznej w postaci trójwarstwowej belki wysięgnikowej, składającej się ze stalowej warstwy środkowej i zewnętrznych warstw piezoelektrycznych. Odkształcenie belki wywołano przemieszczeniem jej swobodnego końca o ustalonej wartości. W pracy zbadano wpływ parametrów geometrycznych i materiałowych generatora belkowego na pozyskiwane napięcie i energię elektryczną. W porównawczych obliczeniach metodą elementów skończonych, przeprowadzonych przy zastosowaniu modeli płaskich i bryłowych, wykazano dostateczną dokładność modeli płaskich. Wyniki otrzymane uproszczoną metodą analityczną i metodą elementów skończonych przedstawiono graficznie w postaci zależności napięcia lub energii od stosunku grubości warstw. Dla wybranych sztywności warstw wyznaczono wartości stosunku ich grubości, którym odpowiada największa efektywność generatora. Zbliżone wyniki uzyskano w przypadku obu metod obliczeniowych.

**Słowa kluczowe:** pozyskiwanie energii elektrycznej, generator piezoelektryczny efektywność, dobór parametrów, płaski i bryłowy model MES

## **Simulation investigation of the piezoelectric beam generator efficiency**

### Summary

The cantilever beam energy harvester consists of three layers, steel in the middle and the two outer piezoelectric layers, was considered. The strain of the beam was caused by the free end static deflection. The influence of the material and the geometry parameters of the beam generator on the generated voltage and the electrical energy was

investigated. Sufficient accuracy of the plain and the solid FEM models were proved. The results obtained in the analytical and the FEM ways was compared and shown graphically as the relationship between the generated voltage or energy and the layer thickness ratio. The most effective, from the energy harvesting point of view, thickness and stiffness ratio of the layers was founded. The similar results from both calculation methods were obtained.

**Keywords:** energy harvesting, piezoelectric generator, efficiency, parameter selection, plane and solid FEM models