

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI,**  
**Sławomir Adam SORKO**

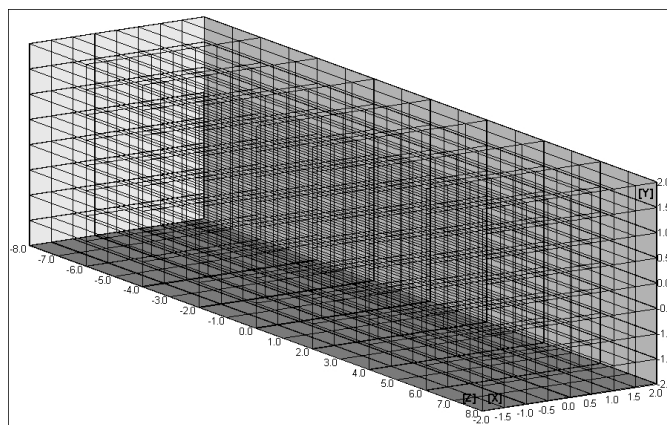
Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok  
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

## **Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych**

### 1 Wstęp

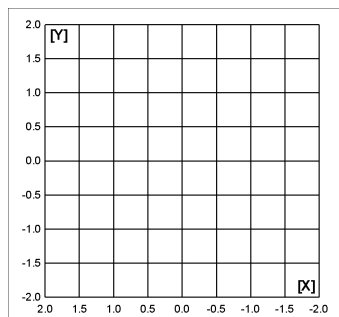
W pracy przedstawiono rozwiązanie jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych (MES) dla różnych kształtów przekroju poprzecznego przy zastosowaniu płaskich siatek.

Metoda elementów skończonych ugruntowana teoretycznie, najbardziej popularna, stosowana jest w wielu programach komercyjnych. Klasyczny algorytm rozwiązania przepływu w przewodach prostoosiowych wymaga budowy pracochłonnej przestrzennej siatki (rys.1). Wyprowadzony w publikacji algorytm pozwala zastąpić skomplikowaną siatkę przestrzenną wewnątrz przewodu siatką płaską zlokalizowaną w przekroju przewodu (rys.2).



*Rys. 1. Przykładowa przestrzenna siatka stosowana w symulacji przepływu w przewodach prostoosiowych składająca się z 512 prostopadłościów*

*Fig. 1. Partition of the rectangle channel volume into 512 parallelepiped cell.*



Rys. 2. Przykładowa płaska siatka przekroju przewodu prostoosiowego składająca się z 64 prostokątnych elementów

Fig. 2. On partitions of the cross-section rectangle channel into 64 rectangles.

Przepływ jednokierunkowy w przewodzie prostoliniowym opisany jest następującym równaniem różniczkowym [1]:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

gdzie:  $c_z$  oznacza prędkość przepływu,  $p$  jest to ciśnienie, natomiast  $\mu$  jest współczynnikiem lepkości dynamicznej.

Pole prędkości przepływu jednokierunkowego  $c_z$  można podzielić na składową prędkości przepływu niezakłóconego  $c_\infty$  oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału  $c_w$  [2]:

$$c_z = c_\infty + c_w \quad (2)$$

gdzie:

$$c_\infty = -\frac{1}{4} \wp(x_q^2 + y_q^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2a)$$

Funkcja (2a) spełnia równanie (4). Wartość prędkości na brzegu ( $L$ ) materialnym i nieprzepuszczalnym równa jest zero, wobec czego warunek brzegowy na ścianie ( $L$ ) przyjmuje postać:

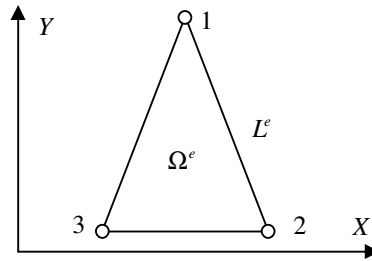
$$c_w(q) = -c_\infty \quad ; \quad q \in L \quad (3)$$

Warunek brzegowy (3) redukuje równanie Poissona (1) do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

## 2 Rozwiązanie zagadnienia ustalonego jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych

W rozwiązaniu zagadnienia przepływu jednokierunkowego w przewodach prostoliniowych metodą elementów skończonych przyjęto trójkątne elementy podziału obszaru. Na rysunku 3 przedstawiono przykładowy element trójkątny, gdzie: ( $\Omega$ ) jest obszarem elementu, natomiast ( $L$ ) jest brzegiem elementu skończonego.



Rys. 3. Trójkątny element skończony

Fig. 3. Triangular finite element

Obliczenia wykonano za pomocą metody Galerkinia [3,4]:

$$\int_{\Omega^e} (\nabla^2 c^e) \Phi_i^e d\Omega = 0 \quad (5)$$

gdzie  $\Phi_i^e$  jest funkcją kształtu (funkcją interpolacyjną).

Prędkość  $c$  jest aproksymowana w obrębie elementu skończonego szeregiem:

$$c = \Phi_i^e c_i \quad (6)$$

gdzie,  $c_i$  są to węzłowe wartości funkcji  $c$ , natomiast  $\Phi_i^e$  są to funkcje interpolacyjne.

Prędkość  $c$  w elemencie trójkątnym przybliżono funkcją liniową:

$$\tilde{\Phi}^e = a_1^e + b_2^e x + c_3^e y \quad (7)$$

Całkując równanie (5) przez części uzyskamy równanie:

$$\int_{L^e} \left( \frac{\partial c^e}{\partial x} n_x + \frac{\partial c^e}{\partial y} n_y \right) \Phi_i^e dL - \int_{\Omega^e} \left( \lambda \frac{\partial c^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} + \lambda \frac{\partial c^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (8)$$

Po podstawieniu zależności (6) do równania (8), otrzymuje się równanie dla  $i$ -tego węzła:

$$A_{ij}^e c_j = F_i^e \quad (9)$$

gdzie:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (10)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial c^e}{\partial x} n_x + \frac{\partial c^e}{\partial y} n_y \right) d\Omega \quad (11)$$

Kolejnym krokiem jest przejście z układu lokalnego (9) do układu globalnego. Globalny układ równań w MES, można uzyskać poprzez sumowanie układów równań otrzymanych dla poszczególnych elementów skończonych.

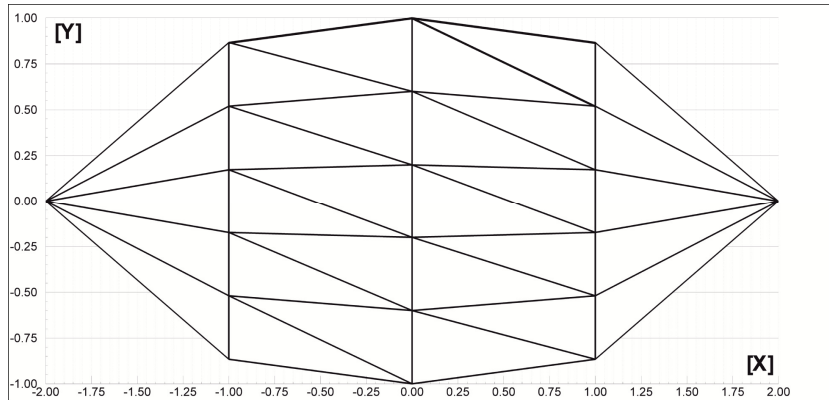
### 3 Weryfikacja rozwiązania zagadnienia ustalonego jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych przy zastosowaniu dwuwymiarowych siatek

W celu wykonania weryfikacji metody MES przy zastosowaniu płaskich siatek w modelowaniu przepływów jednokierunkowych w przewodach prostoosiowych porównano rezultaty obliczeń numerycznych MES ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla przewodu eliptycznego. Obliczenia wykonano dla siatek składających się z elementów trójkątnych o trzech gęstościach: 30 (rys. 4), 510 oraz 2046 (rys. 5) elementów dla  $\varphi = 1$ .

Rozwiązanie teoretyczne pola prędkości w przewodzie prostoliniowym o przekroju elipsy opisane jest następującym wzorem [1]:

$$c_T = -\frac{1}{2} \varphi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad ; \quad \varphi = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (12)$$

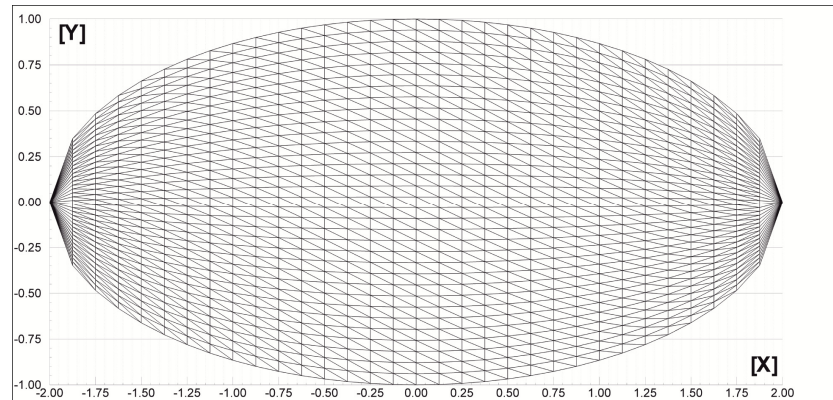
gdzie:  $a=2$ ,  $b=1$  – są to półosie elipsy.



Rys. 4. Przykładowa siatka przekroju przewodu eliptycznego składająca się z 30 trójkątnych elementów

Fig.4. On partitions of the cross-section elliptical channel into 30 triangles

*Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych*



Rys. 5. Przykładowa siatka przekroju przewodu eliptycznego składająca się z 2046 trójkątnych elementów

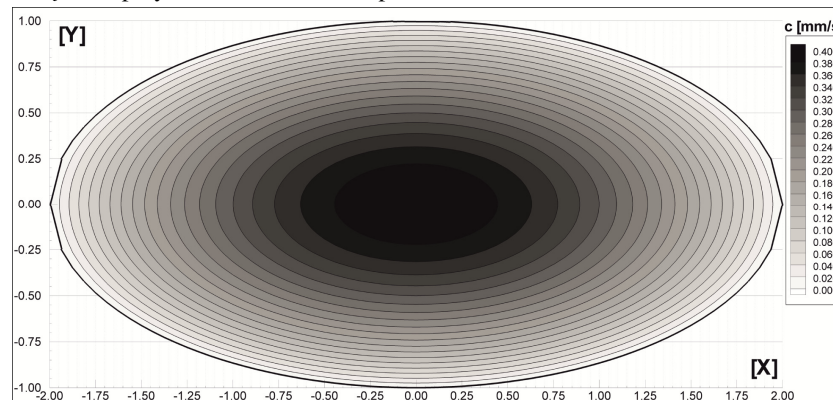
Fig.5. On partitions of the cross-section elliptical channel into 2046 triangles

Błąd rozwiązania MES dla prędkości w wybranych punktach wyznaczono z zależności:

$$\delta c_{MES} = \left| \frac{c_T - c_{MES}}{c_T} \right| * 100\%, \quad (13)$$

gdzie:  $c_{MES}$  oznacza prędkość wyznaczoną metodą elementów skończonych przy zastosowaniu płaskich siatek, natomiast  $c_T$  jest to prędkość wyznaczona z rozwiązania teoretycznego (12).

Na rysunku 6 wykreślono pole prędkości w przewodzie eliptycznym wyznaczone metodą MES przy zastosowaniu siatek płaskich.



Rys. 6. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju eliptycznym wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ( $\xi = 1$ )

Fig.6. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in elliptical channel ( $\xi = 1$ )

Tabelaryczne zestawienie porównania rozwiązania numerycznego i teoretycznego w wybranych punktach przekroju prędkości znajduje się w tabeli 1. Błąd metody MES przy zastosowaniu płaskich siatek maleje wraz z zagęszczeniem siatki. Metoda numeryczna MES charakteryzuje się dużą dokładnością dla siatki składającej się już z 510 trójkątnych elementów, gdzie błąd nie przekracza 0.45%.

Tab. 1. Prędkość w przewodzie eliptycznym- błąd rozwiązania MES przy zastosowaniu dwuwymiarowych siatek

Tab. 1. Velocity in elliptical duct- error analysis applied in MES with two-dimensional grid

Lp	Współrzędne obszaru		Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MES 30el.	Błąd metody MES 30el.
	x	y			MES 30el.
-	mm	mm	mm/s	mm/s	%
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1586380	9,3497143
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2855630	4,8123333
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3649190	2,6882667
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3807900	4,8025000
MES 510 el.					
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1742480	0,4297143
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2986870	0,4376667
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3733350	0,4440000
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3982200	0,4450000
MES 2046 el.					
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1747880	0,1211429
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2996330	0,1223333
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3745260	0,1264000
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3995000	0,1250000

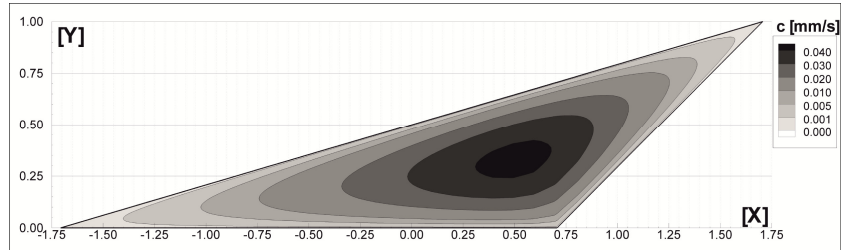
#### 4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono rezultaty obliczeń numerycznych MES przy zastosowaniu siatek dwuwymiarowych pól prędkości w przewodach prostoosiowych, dla których nie są znane rozwiązania analityczne. Wszystkie obliczenia wykonano dla  $\zeta = 1$ .

Na rysunkach 7-10 wykreślono pola prędkości w przewodzie o przekroju: trójkąta rozwartokątnego (rys.7), równoległoboku (rys.8), trapezu równoramiennego (rys.9), oraz sześciokąta (rys.10).

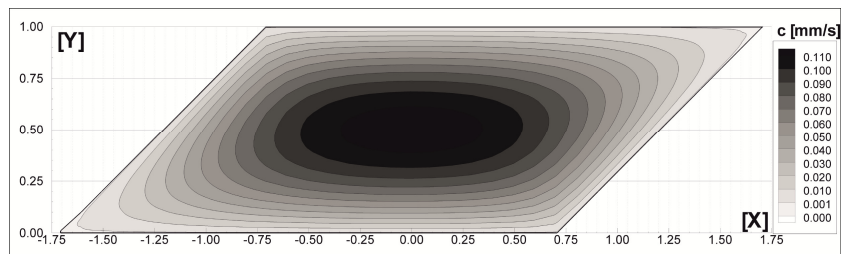
Symulacje zostały przeprowadzone na autorskim programie obliczeniowym FEM 1D DUCT FLOW.

*Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych*



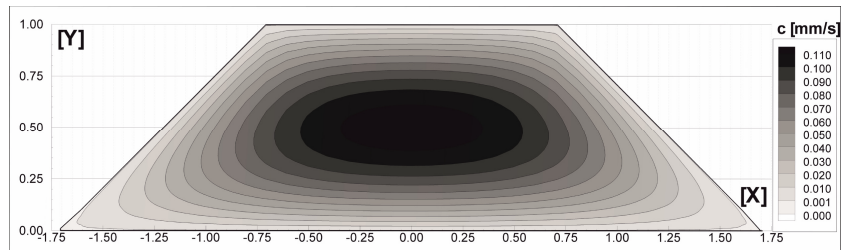
*Rys. 7. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju trójkąta rozwartokątnego wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ( $\xi\varnothing = 1$ )*

*Fig.7. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in isosceles triangle channel ( $\xi\varnothing = 1$ )*



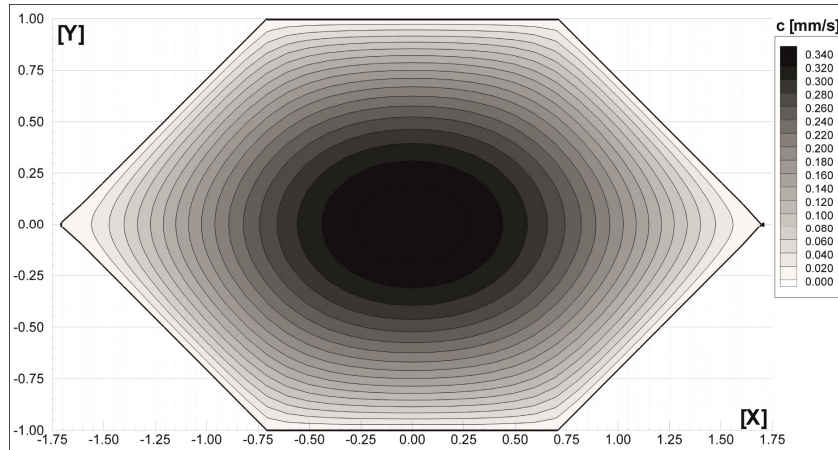
*Rys. 8. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju równoległoboku wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ( $\xi\varnothing = 1$ )*

*Fig.8. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in parallelogram channel ( $\xi\varnothing = 1$ )*



*Rys. 9. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju trapezu wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ( $\xi\varnothing = 1$ )*

*Fig.9. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in trapezium channel ( $\xi\varnothing = 1$ )*



Rys. 10. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju sześciokąta wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ( $\zeta = 1$ )

Fig.10. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in hexagon channel ( $\zeta = 1$ )

## 5 Podsumowanie

Wyprowadzona metoda MES, którą oparto na budowie dwuwymiarowych siatek w przekroju przewodu znacznie upraszcza klasyczny algorytm MES dla przepływu w przewodach prostoosiowych, w których wymagana jest budowa pracochłonnych, przestrzennych siatek. Eliminacja siatek trójwymiarowych znacznie przyspiesza budowę modelu i skraca czas komputerowych obliczeń. Zaprezentowany algorytm charakteryzuje się dużą dokładnością również dla niewielkich gęstości siatek. Główną zaletą przedstawionej numerycznej metody w stosunku do metody elementów brzegowych jest brak błędów ze względu na osobliwości funkcji podcałkowych metody MEB. Metoda szczególnie może być stosowana do dynamicznie rozwijanych metod symulacji w mikrokanalach, gdzie przepływy są zgodne z mechanizmem makroprzepływów [5,6].

## Literatura

1. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
2. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, s. 124-132, Vol.5, nr 3, 2011
3. Reddy J.N., Gartling D.K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press 2010
4. Chung T.J.: *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, Mc-Graw-Hill, New York 1978



5. Celata, G.P.; Cumo, M.; McPhail, S.; Zummo, G., Characterization of fluid dynamic behaviour and channel wall effects in microtube, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, Issue 1, 135-143, 2006
6. Wibel, W.; Ehrhard, P., Experiments on the laminar/turbulent transition of liquid flows in rectangular microchannels, *Heat Transfer Engineering*, Vol. 30, Issue 1-2, pp. 70-77, 2009

### Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych (MES) dla różnych kształtów przekroju poprzecznego przy zastosowaniu płaskich siatek. W publikacji wykonano walidację wyprowadzonej metody oraz przedstawiono przykłady zastosowania algorytmu. W celu wykonania walidacji metody oraz symulacji napisano autorski program obliczeniowy FEM 1D DUCT FLOW w języku Fortran.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów skończonych, przepływy laminarne, przewody prostoosiowe

## **Implementation of the Finite Element Method for the solution of unidirectional flow through straight pipes**

### Summary

The work contains the implementation of the Finite Element Method for the solution of unidirectional flow through straight pipes using a two-dimensional grid. The algorithm was verified by numerical tests and compared with analytical solution. A numerical examples are presented. The computer program FEM 1D DUCT FLOW was written in Fortran programming languages.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy własnej nr W/WBiŚ/8/2011.