

Jan ŁUCZKO, Andrzej CZERWIŃSKI
Politechnika Krakowska, Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków
E-mail: jluczko@mech.pk.edu.pl, ac@mech.pk.edu.pl

Modelowanie i symulacja drgań przewodów wzbudzonych okresowo zmiennym przepływem cieczy

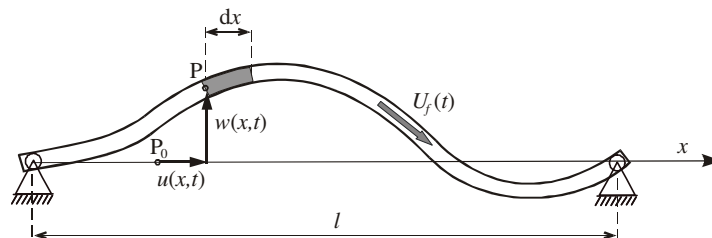
1 Wstęp

Drgania przewodów rurowych wzbudzone przepływającą cieczą lub gazem są przedmiotem analiz w wielu pracach, zwłaszcza w literaturze anglojęzycznej [1-9]. Rezultaty analiz teoretycznych są też przez niektórych autorów potwierdzone eksperymentalnie [1, 9]. W praktyce efektem drgań jest często podwyższony poziom hałasu, a w skrajnych przypadkach drgania mogą spowodować awarię systemu hydraulicznego. Problem modelowania takich układów jest zagadnieniem dość złożonym, a pełny opis zjawisk fizycznych zachodzących w układzie wymaga wprowadzenia sporej liczby nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, trudnych lub wręcz niemożliwych do analizy. Z tego powodu do opisu omawianych zjawisk są wprowadzane modele uproszczone, w tym często są to modele liniowe.

W niniejszej pracy poddano analizie układ opisany jednym nieliniowym równaniem cząstkowym. Wprowadzony model ma służyć analizie zjawisk, będących efektem pulsacji prędkości cieczy przepływającej w prostoliniowym przewodzie. Pulsacje te wynikają z nierównomierności wydajności pomp i są jedną z podstawowych przyczyn drgań układów hydraulicznych. Istotnym problemem jest oszacowanie zakresów parametrów systemu hydraulicznego, w których występuje duże prawdopodobieństwo wzbudzenia się szkodliwych dla układu drgań. W pracy podjęto próbę wyznaczenia takich zakresów oraz zbadania charakteru generowanych drgań.

2 Model układu

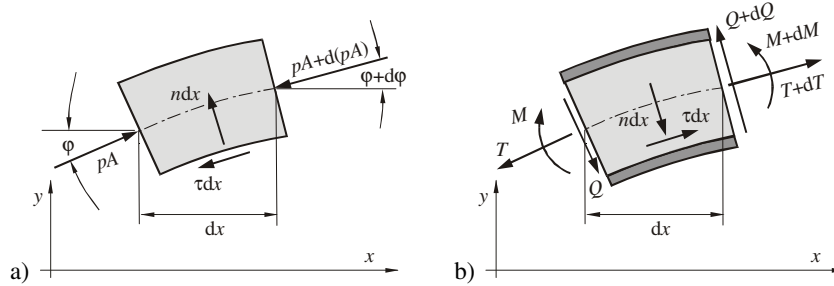
Model analizowanego układu został przedstawiony na rys. 1. Do opisu drgań poprzecznych i podłużnych przewodu o długości l wprowadzono współrzędne $w(x, t)$ i $u(x, t)$.



Rys. 1. Model układu

Fig. 1. Model of the system

Ruch cieczy względem przewodu określa współrzędna $s(t)$. Założono też, że prędkość przepływu $U_f = \dot{s}(t)$ zależy jedynie od czasu. W celu wyprowadzenia równań różniczkowych ruchu [2, 5] rozważmy oddzielnie siły działające na element cieczy (rys. 2a) oraz na element przewodu (rys. 2b).



Rys. 2. Oznaczenia sił: a) element cieczy, b) element przewodu

Fig. 2. Indication of forces: a) fluid element, b) pipe element

Po uwzględnieniu składowych normalnych n i stycznych τ sił wewnętrznych w układzie rura-ciecz oraz przyrostu sił parcia pA , (p – ciśnienie, A – powierzchnia pola przekroju wewnętrznego przewodu) równania elementu cieczy o jednostkowej masie m_f przyjmują postać:

$$m_f dx \frac{D^2(s+u)}{Dt^2} = -\tau dx \cos \varphi - n dx \sin \varphi - d(pA \cos \varphi) \quad (1)$$

$$m_f dx \frac{D^2 w}{Dt^2} = -\tau dx \sin \varphi + n dx \cos \varphi - d(pA \sin \varphi) \quad (2)$$

przy czym kąt φ , określający kierunek stycznej do osi przewodu, zależy nieliniowo od współrzędnych u i w . Występujące w równaniach (1,2) pochodne absolutne należy wyznaczyć z następujących wzorów:

$$\frac{D^2(s+u)}{Dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} U_f + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial U_f}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial U_f}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{D^2 w}{Dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} U_f + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial U_f}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

Równania ruchu elementu przewodu (m_p – masa na jednostkę długości) zależą dodatkowo od sił poprzecznych Q oraz podłużnych T i mają one postać:

$$m_p dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau dx \cos \varphi + n dx \sin \varphi + d(T \cos \varphi) - d(Q \sin \varphi) \quad (5)$$

$$m_p dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \tau dx \sin \varphi - n dx \cos \varphi + d(T \sin \varphi) + d(Q \cos \varphi) \quad (6)$$

Wyznaczając występujące w równaniach (5) i (6) siły: poprzeczną Q oraz osiową T uwzględniono wpływ tłumienia wewnętrznego [3,7], przyjmując hipotezę Voigta-Kelvina. Zależność:

$$Q = -EI_p \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} \right] \quad (7)$$

pozwala obliczyć siłę poprzeczną, natomiast siłę rozciągającą po uwzględnieniu nieliniowego związku [3, 4, 8]:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (8)$$

można wyznaczyć ze wzoru:

$$T = T_0 + EA_p \left[\varepsilon + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] = T_0 + EA_p \left[1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (9)$$

Zakładając dalej, że występujące w równaniach (1), (2), (5) i (6) przyrosty sił wynikają tylko ze zmiany zmiennej x , czyli przykładowo:

$$d(T \sin \varphi) = \frac{\partial(T \sin \varphi)}{\partial x} dx \quad (10)$$

po dodaniu stronami równań (1,2) i (5,6) otrzymuje się równania:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_f \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} U_f + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial U_f}{\partial t} + \frac{\partial U_f}{\partial t} \right] + \frac{\partial[(pA - T) \cos \varphi]}{\partial x} + \frac{\partial(Q \sin \varphi)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_f \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} U_f + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial U_f}{\partial t} \right] + \frac{\partial[(pA - T) \sin \varphi]}{\partial x} - \frac{\partial(Q \cos \varphi)}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

gdzie $m = m_p + m_f$. Ścisły opis modelu wymaga dołączenia do tych równań związków wynikających z prawa ciągłości, a także uwzględnienia zmiany pola przekroju, będącej efektem zmiany zarówno ciśnienia, jak i siły rozciągającej. Również gęstość cieczy może ulegać zmianom – wtedy wykorzystuje się dodatkowo moduł ściśliwości.

W celu oszacowania wpływu podstawowych parametrów układu na jego drgania przyjęto dalej znaczne uproszczenia, pozwalające w efekcie finalnym opisać ruch układu jednym równaniem różniczkowym cząstkowym. Założono dalej, że siła osiowa nie zależy od zmiennej przestrzennej, w związku z czym można ją przyrównać do wartości średniej, obliczonej następująco:

$$T(t) = T_0 + \frac{EA_p}{l} \left[1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (13)$$

Dla zamocowanych przegubowo obu końców przewodu zachodzą związki: $u(t,0) = u(t,l)$, w związku z czym wzór (14) upraszcza się do postaci:

$$T(t) = T_0 + \frac{EA_p}{2l} \left[1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

Przy założeniu małych drgań,

$$\sin \varphi = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \cos \varphi = 1 \quad \dots \dots \quad (15)$$

pominięciu członów nieliniowych oraz osiowych sił bezwładności (za wyjątkiem składnika $m_j \partial U_f / \partial t$) z równania (11) otrzymuje się związek:

$$\frac{\partial(pA)}{\partial x} + m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

z którego, po scałkowaniu w granicach od dowolnego x do l , wynika zależność [6]:

$$pA = p_0 A + m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} (l - x) \quad (17)$$

Po wstawieniu wzorów (7), (14), (15) i (17) do (12) i wykorzystaniu związku:

$$\frac{\partial(pA - T)}{\partial x} \sin \varphi = \frac{\partial(pA)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = m_f \frac{\partial U_f}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (18)$$

następujące równanie opisuje drgania poprzeczne przewodu z cieczą:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_f \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U_f^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} U_f \right] + EI_p \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right] + \left[p_0 A - T_0 + \beta \frac{\partial U_f}{\partial t} (l - x) - \frac{EA_p}{2l} \left[1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (19)$$

W pracach dotyczących podobnych zagadnień wprowadza się zmienne bezwymiarowe, odnosząc najczęściej przemieszczenia do długości przewodu ($y(\xi, \tau) = w/l$, $\xi = x/l$). Bezwymiarowy czas jest definiowany związkiem: $\tau = \omega_0 t$, gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{EI_p}{ml^4}} \quad (20)$$

Równanie (19) w zmiennych bezwymiarowych ma postać:

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y}' U + [U^2 - q + \beta \dot{U} (1 - \xi) - \lambda] (y'^2 + 2\zeta \dot{y}' \dot{y}) d\xi y'' + y'''' + \zeta \dot{y}'''' = 0 \quad (21)$$

przy czym oznaczono dalej kropką różniczkowanie względem zmiennej τ , a primem względem ξ . Występujące w równaniu (21) parametry są zdefiniowane wzorami:

$$\beta = \sqrt{\frac{m_f}{m}} \quad U = \frac{\beta U_f}{\omega_0 l} \quad \zeta = \frac{\alpha}{m \omega_0} \quad \lambda = \frac{Al^2}{2I_p} \quad q = \frac{(T_0 - p_0 A)l^2}{EI_p} \quad (22)$$

3 Metoda Galerkina

Do rozwiązania równania (21) zastosowano metodę Galerkina [4, 8], zakładając dla podparcia przegubowego przybliżone rozwiązanie następująco:

$$y(\tau, \xi) = \sum_{k=1}^3 y_k(\tau) \sin k\pi\xi \quad (21)$$

W prowadzonych dalej obliczeniach numerycznych ograniczono się do uwzględnienia pierwszych trzech form drgań. W takim przypadku po zastosowaniu metody Galerkina z uwzględnieniem warunków ortogonalności funkcji trygonometrycznych otrzymuje się układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych o postaci:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \zeta\pi^4 \dot{y}_1 - \frac{16}{3}\beta U \dot{y}_2 - \frac{64}{9}\beta \dot{U} y_2 + \pi^2(\pi^2 - 0.5\beta \dot{U} - f)y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \frac{16}{3}\beta U \dot{y}_1 + 16\zeta\pi^4 \dot{y}_2 - \frac{48}{5}\beta U \dot{y}_3 - \frac{16}{9}\beta \dot{U} y_1 + \pi^2(16\pi^2 - 2\beta \dot{U} - 4f)y_2 - \frac{432}{25}\beta \dot{U} y_3 &= 0 \\ \ddot{y}_3 + \frac{48}{5}\beta U \dot{y}_2 + 81\zeta\pi^4 \dot{y}_3 - \frac{192}{25}\beta \dot{U} y_2 + \pi^2(81\pi^2 - 4.5\pi^2\beta \dot{U} - 9f)y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie

$$f = U^2 - q - 0.5\lambda\pi^2[y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2 + 2\zeta(y_1\dot{y}_1 + 4y_2\dot{y}_2 + 9y_3\dot{y}_3)] \quad (23)$$

4 Rezultaty obliczeń

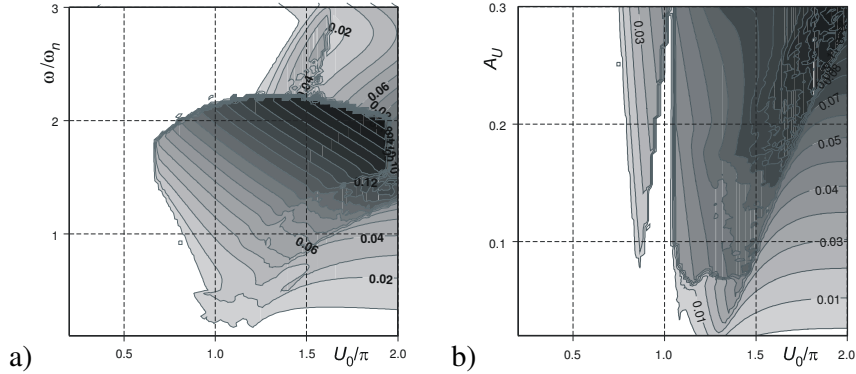
W obliczeniach numerycznych ustalono wartości następujących parametrów: $\beta=0.64$, $\lambda=7000$, $\zeta=0.01$, $q=0$. W dalszych badaniach jest zaplanowany eksperyment, którego celem jest potwierdzenie rezultatów analiz teoretycznych. Ze wstępnych oszacowań wynikają między innymi wartości bezwymiarowych parametrów β i λ . Na obecnym etapie skupiono się na zbadaniu wpływu parametrów charakteryzujących wymuszenie, czyli przy założeniu harmonicznie zmiennej prędkości:

$$U = U_0(1 + A_U \sin \omega\tau) \quad (24)$$

badano wpływ średniej prędkości przepływu U_0 , amplitudy pulsacji A_U oraz częstości wymuszenia ω . Z analizy układu liniowego ($\lambda=0$) wynika, że ze wzrostem prędkości przepływu maleje podstawowa częstość drgań własnych układu, przy czym dla zerowej prędkości jest ona równa $\omega_n=\pi^2$. Utrata stabilności układu zachodzi dla prędkości $U_0^k=\pi$ (prędkość krytyczna). Z tego względu podczas badania wpływu parametrów U_0 i ω zmieniano je w przedziałach obejmujących wartości U_0^k i ω_n . Zakres zmian U_0 , ω i A_U ograniczono od góry odpowiednio wartościami: $2U_0^k$, $3\omega_n$ oraz liczbą 0.3.

Na rys. 3 przedstawiono wykresy, ilustrujące wpływ parametrów U_0 i ω (rys. 3a) oraz U_0 i A_U (rys. 3b) na poziom drgań, mierzony wartością skuteczną prędkości w punkcie oddalonym o $1/4$ długości przewodu od punktu jego zamocowania. W punkcie tym uwidacznia się wpływ wszystkich badanych form drgań (czyli zmiennych y_1 , y_2 i y_3). Analizując rezultaty można zauważyć, że drgania wywołane przepływem cieczy wzbudzają się głównie dla prędkości większych od prędkości krytycznej. Dla prędkości mniejszych uwidacznia się zjawisko rezonansu parametrycznego (rys. 3b) W układzie liniowym (dla $\lambda=0$) w tym zakresie mamy do czynienia z drganiami parametrycznymi, narastającymi w sposób nieograniczony. Uwzględnienie nieliniowości geometrycznych,

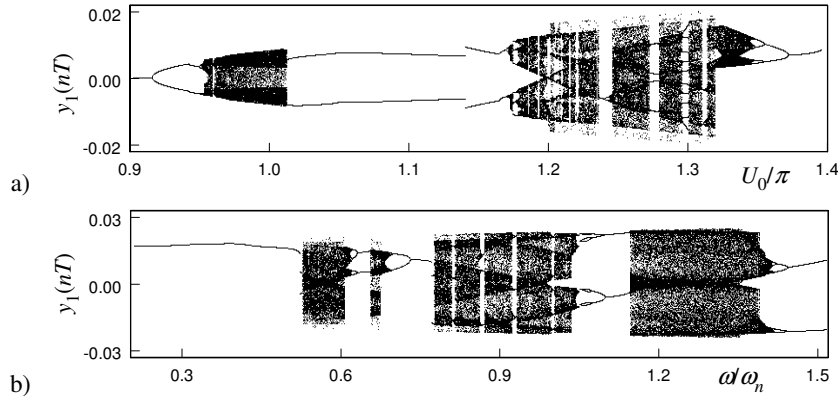
działających ograniczająco, pozwala oszacować poziom emitowanych drgań. Rośnie one ze wzrostem amplitudy pulsacji, najsilniej w zakresach rezonansu parametrycznego.



Rys. 3. Wartość skuteczna prędkości w punkcie $\xi=1/4$: a) Wpływ parametrów ω i U_0 (dla $A_U=0.15$), b) Wpływ parametrów A_U i U_0 (dla $\omega/\omega_n=1$)

Fig. 3. The rms value of velocity in the point $\xi=1/4$: a) influence of parameters ω and U_0 (for $A_U=0.15$), b) influence of parameters A_U and U_0 (for $\omega/\omega_n=1$)

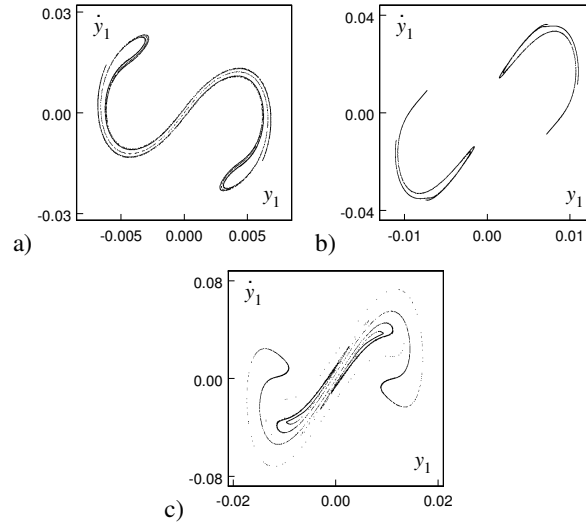
W celu zbadania charakteru drgań sporządzono diagramy bifurkacyjne (rys. 4) metodą stroboskopową, notując wartości wybranej współrzędnej (np. y_1) co okres wymuszenia. W zakresach, w których na diagramie występuje układ skończonej liczby linii drgania są okresowe (w tym często podharmoniczne), W pozostałych zakresach drgania są chaotyczne. Rząd drgań podharmonicznych jest równy liczbie linii na diagramie.



Rys. 4. Diagram bifurkacyjny: a) wpływ prędkości U_0 ($\omega/\omega_n=0.5$, $A_U=0.15$), b) wpływ częstości ω ($U_0/\pi=1.5$, $A_U=0.2$)

Fig. 4. Bifurcation diagram: a) influence of velocity U_0 ($\omega/\omega_n=0.5$, $A_U=0.15$), b) influence of frequency ω ($U_0/\pi=1.5$, $A_U=0.2$)

W celu potwierdzenia charakteru chaotycznego drgań należy dodatkowo sporządzić portrety stroboskopowe (mapy Poincaré'go) najlepiej na płaszczyznach fazowych (rys.5). Ich fraktalna struktura świadczy o ruchu chaotycznym.



Rys. 5. Mapy Poincare'go ($\omega/\omega_n=0.5$, $A_U=0.15$): a) $U_0=0.99$, b) $U_0=1.19$, c) $U_0=1.29$
Fig. 5. Poincare maps ($\omega/\omega_n=0.5$, $A_U=0.15$): a) $U_0=0.99$, b) $U_0=1.19$, c) $U_0=1.29$

5 Podsumowanie

Z analizy przedstawionych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Przepływ cieczy w przewodach z prędkościami zbliżonymi do krytycznych lub większymi może być powodem drgań układu, prowadzących w skrajnym przypadku do zniszczenia systemu hydraulicznego.
- Uwzględnienie nieliniowości geometrycznych powoduje ograniczenie amplitud, pozwalając oszacować poziom emitowanych drgań.
- Wyniki symulacji numerycznej wskazują na możliwość wzbudzania się drgań podharmonicznych oraz chaotycznych.
- Rezultaty analiz numerycznych mogą być podstawą doboru parametrów układu hydraulicznego w planowanym eksperymencie.

Literatura

1. Bagchi K., Gupta S.K., Kushari A., Iyengar N.G.R.: Experimental study of pressure fluctuations and flow perturbations in air flow through vibrating pipes, *Journal of Sound and Vibration*, 328, 441–455, 2009
2. Gorman D.G., Reese J.M., Zhang Y.L.: Vibration of a flexible pipe conveying viscous pulsating fluid flow, *Journal of Sound and Vibration*, 230, 2, 379-392, 2000
3. Jin J.D., Song Z.Y.: Parametric resonances of supported pipes conveying pulsating fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 20, 763-783, 2005
4. Lee S. I., Chung J.: New non-linear modelling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 254, 2, 313-325, 2002
5. Lee U., Park J.: Spectral element modelling and analysis of a pipeline conveying internal unsteady fluid, *Journal of Fluids and Structures*, 22, 273-292, 2006

6. Païdoussis, M.P.: *Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 1, Academic Press, London, 1998
7. Panda L.N., Kar R.C.: Nonlinear dynamics of a pipe conveying pulsating fluid with combination, principal parametric and internal resonances, *Journal of Sound and Vibration*, 309, 375-406, 2008
8. Wang L.: A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, 115-121, 2009
9. Zhang Y.L., Reese J.M., Gorman D.G.: An experimental study of the effects of pulsating and steady internal fluid flow on an elastic tube subjected to external vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 266, 355-367, 2003

Streszczenie

W pracy poddano analizie model opisujący drgania podpartych przegubowo prostoliniowych przewodów, spowodowane zmianą prędkości przepływającej cieczy. Ruch układu opisano równaniem różniczkowym cząstkowym czwartego rzędu, uwzględniającym nieliniowości geometryczne. Wykorzystując metodę Galerkin zagadnienie rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego sprowadzono do problemu analizy układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych. Zbadano wpływ wybranych parametrów na wartość skuteczną prędkości. Wykazano możliwość wzbudzenia się w pewnych zakresach prędkości przepływu i częstości wymuszenia drgań podharmonicznych i chaotycznych.

Summary

Modeling and simulation of flow induced vibration in pipes conveying periodically pulsating fluid

The paper is concerned with the analysis of a model describing the vibrations of simply supported straight pipes conveying periodically pulsating fluid. The vibrations of the hydraulic system are described by using a fourth-order partial differential equation, with the inclusion of geometrical non-linearities. Through the application of the Galerkin method, the non-linear problem is reduced to the solution of three ordinary differential equations. The influence of several significant parameters of the model on the rms value of velocity is investigated. The possibility of exciting sub-harmonic and chaotic excitations at certain intervals of excitation frequency and flow velocity is presented.