

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI, Piotr RYNKOWSKI**

Politechnika Białostocka, WBiIS, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, rynkowski@pb.edu.pl

## **Modelowanie przepływu ciepła w przegrodach z instalacjami ciepłej wody użytkowej metodą brzegowych równań całkowych**

### 1 Wstęp

Sprawność transportu ciepłej wody użytkowej w instalacjach ogrzewczych zależy w dużej mierze od prawidłowej izolacji termicznej przewodów, w tym również od racjonalnego prowadzenia przewodów przechodzących przez przegrody budowlane. W opracowaniu przedstawiono metodę wyznaczania pól temperatury i strumienia ciepła przewodów instalacji ciepłej wody użytkowej i przewodów cyrkulacyjnych prowadzonych przez ściany i stropy budynków. Zagadnienie wymiany ciepła na styku przewodów i struktur budowlanych, ograniczone do dwuwymiarowego przewodnictwa cieplnego w warunkach ustalonych rozwiązano metodą brzegowych równań całkowych.

Podstawowym walorem metody brzegowych równań całkowych nazywanej również w nawiązaniu do metod siatkowych metodą elementów brzegowych (MEB), jest to, że rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym w pewnym obszarze poszukuje się na brzegu tego obszaru, co w numerycznym rozwiązaniu wymaga konstrukcji siatki punktów jedynie fizycznym brzegu obszaru, a nie w całym rozpatrywanym obszarze, jak to ma miejsce w przypadku metod siatkowych: metody różnic skończonych (MRS) i metody elementów skończonych (MES) [1]. Ta istotna właściwość metody, w szczególności w jej najbardziej prostej aplikacji polegającej na podziale brzegu na elementy o stałej wartości poszukiwanej funkcji w obrębie każdego elementu, pozwala na konstruowanie prostych i wydajnych algorytmów obliczeniowych do symulacji złożonych zagadnień przepływowych, cieplnych i innych w obszarach o złożonej geometrii bez potrzeby generowania złożonych siatek do rozwiązywania tych zagadnień [2].

### 2 Brzegowe równanie całkowe opisujące ustalone pole temperatury w zagadnieniach dwuwymiarowych

Pole temperatury w ustalonym przepływie ciepła, w którym dominującym mechanizmem jest przewodzenie ciepła jest opisane równaniem Laplace'a względem temperatury  $T$  [3]:

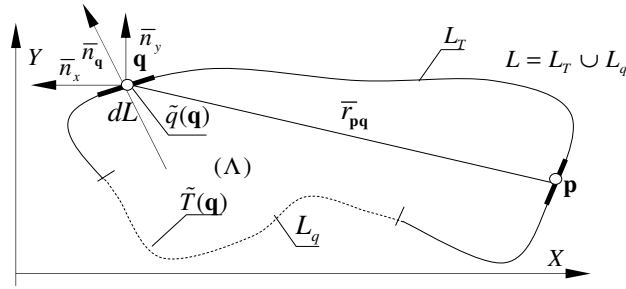
$$\nabla^2 T = 0 \quad (1)$$

Gęstość strumienia ciepła  $q$  jest równa:

$$q = -\lambda \nabla T \quad (2)$$

gdzie:  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła.

Zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego (3) formułuje się w postaci złożonego warunku brzegowego Dirichleta i Neumanna zakładającego znane wartości temperatury  $\tilde{T}(\mathbf{q})$  na części brzegu  $L_T$  ( $\mathbf{q} \in L_T$ ) i znane wartości strumienia ciepła  $\tilde{q}(\mathbf{q})$  na części brzegu  $L_q$  ( $\mathbf{q} \in L_q$ ) (rys. 1).



Rys. 1. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w obszarze płaskim  
Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions

Rozwiązaniem równania Laplace'a (1) jest równanie całkowe [2]:

$$\begin{aligned} -\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{(L_q)} q(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + \int_{(L_T)} T(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_T = \\ = - \int_{(L_T)} \tilde{q}(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_T - \int_{(L_q)} \tilde{T}(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L$$

gdzie dla brzegu gładkiego  $\chi(\mathbf{p})=1/2$  oraz:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left( \frac{1}{r_{pq}} \right); \quad r_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}, \quad (3a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2}. \quad (3b)$$

Po wyznaczeniu  $T(\mathbf{p})$  oraz  $q(\mathbf{p})$  temperaturę w dowolnym punkcie ( $\mathbf{p} \in \Lambda$ ) rozpatrywanego obszaru ( $\Lambda$ ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{p}) = \int_{(L)} T(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL + \int_{(L)} q(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL \quad (4)$$

$$(\mathbf{q}) \in (L), (\mathbf{p}) \in (\Lambda)$$

Wobec zależności (2) strumień ciepła w kierunku  $x$  i  $y$  w przyjętym układzie współrzędnych w punktach ( $\mathbf{p}$ ) rozpatrywanego pola temperatury w obszarze ( $\Lambda$ ) ograniczonym brzegiem ( $L$ ) otrzymuje się różniczkując wyrażenia podcałkowe w wyrażeniu (4) odpowiednio względem  $x$  i  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} q_x(\mathbf{p}) &= -\lambda \frac{\partial T(\mathbf{p})}{\partial x_p} = - \int_{(L)} T(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL - \int_{(L)} q(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL \\ q_y(\mathbf{p}) &= -\lambda \frac{\partial T(\mathbf{p})}{\partial y_p} = - \int_{(L)} T(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL - \int_{(L)} q(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{x_q - x_p}{r_{pq}^2} \\ \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} &= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\left( (y_q - y_p)^2 - (x_q - x_p)^2 \right) n_x - 2(x_q - x_p)(y_q - y_p) n_y}{r_{pq}^4} \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{y_q - y_p}{r_{pq}^2} \\ \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} &= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\left( (x_q - x_p)^2 - (y_q - y_p)^2 \right) n_y - 2(x_q - x_p)(y_q - y_p) n_x}{r_{pq}^4} \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

Moduł gęstość strumienia ciepła jest równy [4]:

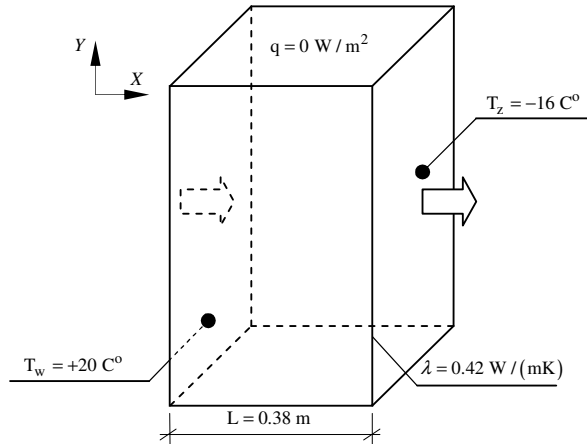
$$q(\mathbf{p}) = \sqrt{(q_x(\mathbf{p}))^2 + (q_y(\mathbf{p}))^2} \quad (6)$$

Adiabaty dane są równaniem linii przepływu ciepła [4]:

$$d\Xi = q_x(\mathbf{p})dy - q_y(\mathbf{p})dx \quad (7)$$

### 3 Walidacja wyznaczania funkcji prądu metodą elementów brzegowych w zagadnieniach płaskich

Jako zagadnienie testowe przyjęto jednokierunkowe przenikanie ciepła w ścianie jednowarstwowej o grubości 0,38 m, zbudowanej z bloczków keramzytobetonowych o współczynniku przewodzenia ciepła 0,42 W/mK. Warunki brzegowe zagadnienia testowego zostały przedstawione na rysunku 2.



Rys. 2. Warunki brzegowe w jednowarstwowej przegrodzie budowlanej  
 Fig. 2. Sketch to boundary in a monostratal wall

Pole temperatury w przekroju ściany wyznaczono ze wzoru analitycznego:

$$T_T(x) = T_w + \frac{(T_z - T_w)x}{L} \quad (8)$$

gdzie:  $T_w$ ,  $T_z$  są temperaturą na powierzchni ściany,  $L$  oznacza grubość ściany.

Gęstość strumienia ciepła została wyznaczona ze wzoru:

$$q_T(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (9)$$

Obliczenia wykonano dla brzegu składającego się z 100 oraz 1000 elementów. Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla temperatury i strumienia ciepła wyznaczono z zależności:

$$\delta T_{\text{MEB}} = \left| \frac{T_T - T_{\text{MEB}}}{T_T} \right| * 100\% \quad , \quad \delta q_{\text{MEB}} = \left| \frac{q_T - q_{\text{MEB}}}{q_T} \right| * 100\% \quad , \quad (10)$$

gdzie:  $T_{\text{MEB}}$  i  $q_{\text{MEB}}$  oznacza temperaturę i strumień ciepła wyznaczona metodą brzegowych równań całkowych, natomiast  $T_T$  i  $q_T$  oznacza wielkości wyznaczone ze wzoru (8) i (9).

Tabelaryczne zestawienie porównania rozwiązania numerycznego i teoretycznego w przekroju  $Y=0,30$  m znajduje się w tabeli 1 dla temperatury oraz w tabeli 2 dla gęstości strumienia ciepła.

*Modelowanie przepływu ciepła w przegrodach z instalacjami  
cieplej wody użytkowej metodą brzegowych równań całkowych*

*Tab. 1. Pole temperatury - błąd rozwiązania BEM*

*Tab. 1. The temperature – error analysis applied in BEM*

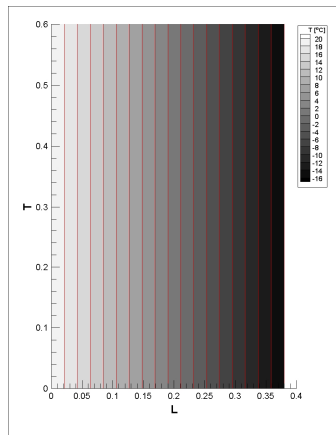
| Współrzędne węzłów |              | Rozwiązanie teoretyczne | Rozwiązanie num. MEB<br>100 el. | Błąd metody MEB<br>100 el. | Roz. num. MEB<br>1000 el. | Błąd metody MEB<br>1000 el. |
|--------------------|--------------|-------------------------|---------------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| $X_M$<br>[m]       | $Y_M$<br>[m] | $T_T$<br>[°C]           | $T_{MEB}$<br>[°C]               | $\square T_{MEB}$<br>[%]   | $T_{MEB}$<br>[°C]         | $\square T_{MEB}$<br>[%]    |
| 5,0E-03            | 3,0E-01      | 1,9526E+01              | 1,9605E+01                      | 4,0270E-01                 | 1,9534E+01                | 3,9900E-02                  |
| 5,0E-02            | 3,0E-01      | 1,5263E+01              | 1,5323E+01                      | 3,8922E-01                 | 1,5269E+01                | 3,8616E-02                  |
| 1,0E-01            | 3,0E-01      | 1,0526E+01              | 1,0565E+01                      | 3,6368E-01                 | 1,0530E+01                | 3,5986E-02                  |
| 1,5E-01            | 3,0E-01      | 5,7895E+00              | 5,8066E+00                      | 2,9599E-01                 | 5,7912E+00                | 2,9096E-02                  |
| 2,0E-01            | 3,0E-01      | 1,0526E+00              | 1,0486E+00                      | 3,8282E-01                 | 1,0522E+00                | 3,9796E-02                  |
| 2,5E-01            | 3,0E-01      | -3,6842E+00             | -3,7094E+00                     | 6,8422E-01                 | -3,6867E+00               | 6,8471E-02                  |
| 3,0E-01            | 3,0E-01      | -8,4211E+00             | -8,4674E+00                     | 5,5092E-01                 | -8,4257E+00               | 5,4953E-02                  |
| 3,5E-01            | 3,0E-01      | -1,3158E+01             | -1,3225E+01                     | 5,1368E-01                 | -1,3165E+01               | 5,1178E-02                  |
| 3,8E-01            | 3,0E-01      | -1,5526E+01             | -1,5605E+01                     | 5,0477E-01                 | -1,5534E+01               | 5,0166E-02                  |

W przypadku brzegu składającego się ze 100 elementów błąd metody brzegowych równań całkowych oscyluje wokół wartości 0,5 % dla wybranych punktów, natomiast w przypadku brzegu podzielonego na 1000 elementów błąd ten jest dziesięciokrotnie mniejszy, co świadczy, że jest to metoda bardzo dokładna. Na rysunku 3 wykreślono pole temperatury wyznaczone metodą elementów brzegowych dla powyższego przykładu.

*Tab. 2. Gęstość strumienia ciepła - błąd rozwiązania BEM*

*Tab. 2. The thermal flux – error analysis applied in BEM*

| Współrzędne węzłów |              | Rozwiązanie teoretyczne      | Rozwiązanie num. MEB<br>100 el.  | Błąd metody MEB<br>100 el. | Roz. num. MEB<br>1000 el.        | Błąd metody MEB<br>1000 el. |
|--------------------|--------------|------------------------------|----------------------------------|----------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| $X_M$<br>[m]       | $Y_M$<br>[m] | $q_T$<br>[W/m <sup>2</sup> ] | $q_{MEB}$<br>[W/m <sup>2</sup> ] | $\square q_{MEB}$<br>[%]   | $q_{MEB}$<br>[W/m <sup>2</sup> ] | $\square q_{MEB}$<br>[%]    |
| 5,0E-03            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9978E+01                       | 4,7279E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4509E-02                  |
| 5,0E-02            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4589E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4472E-02                  |
| 1,0E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4620E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4434E-02                  |
| 1,5E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4665E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4409E-02                  |
| 2,0E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4699E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4404E-02                  |
| 2,5E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4719E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4421E-02                  |
| 3,0E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9967E+01                       | 4,4726E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4459E-02                  |
| 3,5E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9968E+01                       | 4,4867E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4504E-02                  |
| 3,8E-01            | 3,0E-01      | 3,9789E+01                   | 3,9977E+01                       | 4,7105E-01                 | 3,9807E+01                       | 4,4524E-02                  |

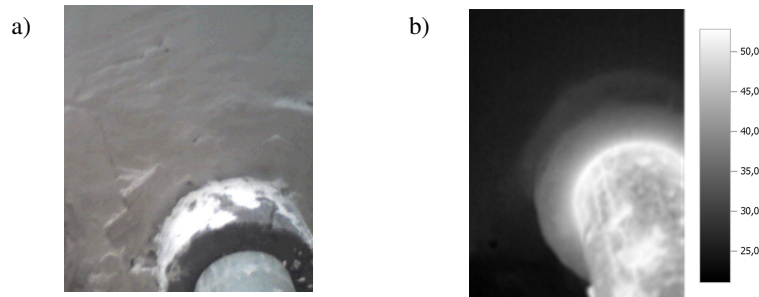


Rys. 3. Pole temperatury w jednowarstwowej przegrodzie budowlanej - rozwiązanie numeryczne MEB

Fig. 3. The temperature field in a monostratal wall - BEM solution

#### 4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono przykład obliczeniowy symulacji przenikania ciepła w przegrodzie budowlanej pionowej wykonanej z żelbetu o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_{fz}=1,70$  W/mK, zlokalizowanej w piwnicy, przez którą przechodzi przewód ciepłej wody użytkowej. W warunkach brzegowych przyjęto rzeczywiste temperatury zmierzone miernikiem wyposażonym w czujnik oporowy. Pierwszy przypadek dotyczy przewodu c.w.u., który jest zaizolowany w ścianie otuliny ze spienionego polietylenu o współczynniku przewodzenia ciepła  $\lambda_{fz}=0,038$  W/mK. Temperatura na powierzchni stalowej rury ocynkowanej o średnicy zewnętrznej 42,4 mm wynosi 52,80 °C, temperatura na powierzchni izolacji przewodu o grubości 13 mm wynosi 29,8 °C, temperatura ściany w odległości 1,5 m od powierzchni izolacji wynosi 8,0 °C. Fotografiją przewodu c.w.u. przedstawiono na rysunku 4a.



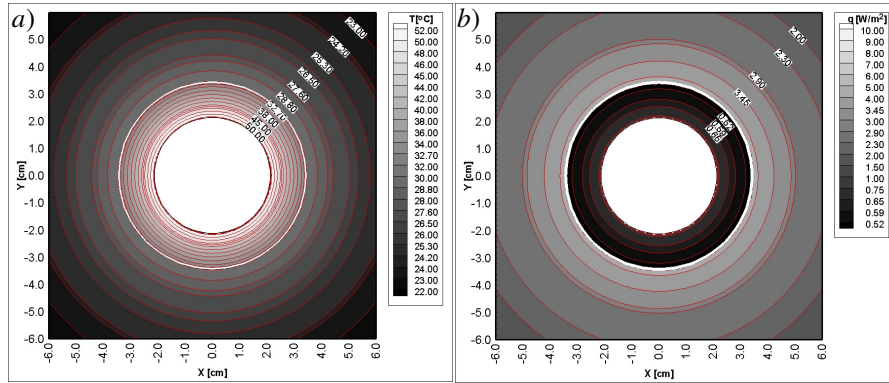
Rys. 4. Przenikania ciepła przez przegrodę budowlaną przez, którą przechodzi izolowana termicznie instalacja c.w.u.: a) widok ogólny, b) termogram powierzchni ściany

Fig.4. Heat transfer from a hot water pipe without thermal insulation through a wall: a) photography, b) thermogram.

Rysunek 4b przedstawia termogram wykonany kamerą termowizyjną.

*Modelowanie przepływu ciepła w przegrodach z instalacjami  
cieplej wody użytkowej metodą brzegowych równań całkowych*

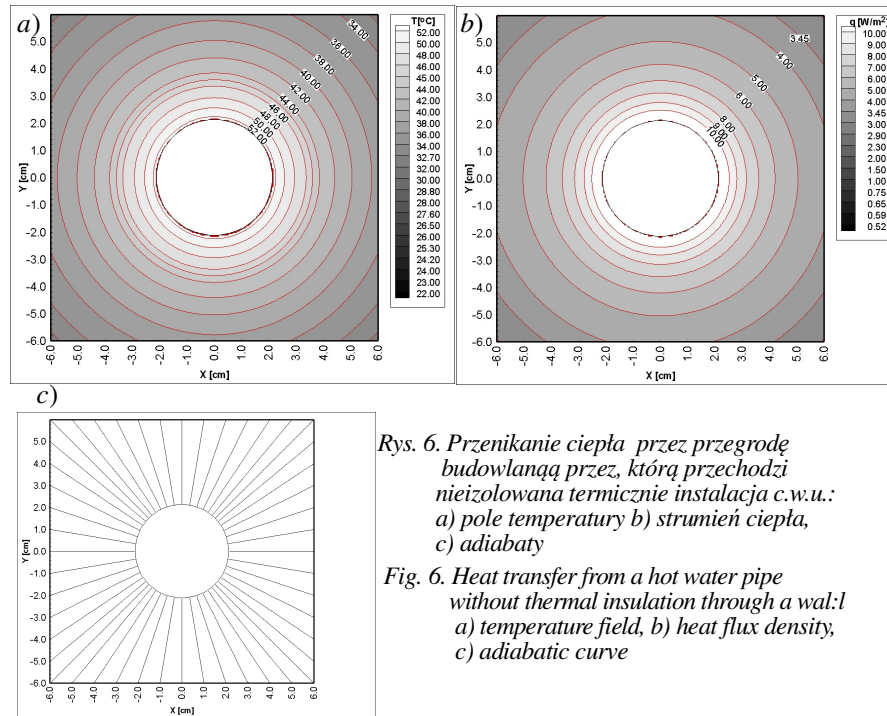
Na rysunku 5a wykreślono izotermy wyznaczone metodą brzegowych równań całkowych dla przypadku przewodu c.w.u. izolowanego termicznie od przegrody, natomiast na rysunku 5b wykreślono rozkład gęstości strumienia.



*Rys. 5. Przenikanie ciepła przez przegrodę budowlaną przez, którą przechodzi izolowana termicznie instalacja c.w.u.: a) pole temperatury, b) gęstość strumienia ciepła*  
*Fig. 5. Heat transfer from a hot water pipe with thermal insulation through a wall: a) temperature field, b) heat flux density*

Izotermy (rys. 5a) otrzymane z obliczeń są zbieżne z obrazem termogramu (rys. 4b).

W drugim przypadku wykonano obliczenia dla wariantu, w którym pominięto izolację cieplną c.w.u. Rysunek 6a przedstawia pole temperatury wyznaczone metodą brzegowych równań całkowych dla nieizolowanego termicznie przewodu, rysunek 6b przedstawia rozkład gęstości strumienia ciepła, na rysunku 6c wykreślono adiabaty.



Porównanie rezultatów obliczeń MEB (rys.5a-b oraz 6a-b) wskazuje jak ważne jest izolowanie przewodów c.w.u., które przechodzą przez przegrody budowlane. Brak izolacji powoduje znaczące straty ciepła instalacji c.w.u. i tym samym przyczynia się do wzrostu kosztów podgrzania c.w.u.

## 5 Podsumowanie

Przedstawiony w pracy algorytm oparty na metodzie brzegowych równań całkowych jest wydajnym i dokładnym narzędziem służącym do wyznaczania pól temperatur, rozkładów gęstości strumienia ciepła oraz rozkładu adiabat. Znajomość pól temperatur oraz rozkładów gęstości strumienia ciepła może być przydatna przy pracach nad poprawą sprawności transportu ciepłej wody użytkowej. Metoda również może być stosowana do oceny izolacyjności termicznej najczęściej stosowanych otulin

## Literatura

1. Reddy J.N., Gartling D.K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press 2010
2. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag. NY 1984
3. Patankar S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor and Francis 1980



4. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Modelowanie przepływu ciepła w przegrodach z instalacjami centralnego ogrzewania metodą brzegowych równań całkowych. *Budownictwo i Inżynieria Środowiska* Vol.1, nr 3 2010

### Streszczenie

W artykule omówiono modelowanie przenikania ciepła w przegrodach budowlanych, przez które przechodzą przewody ciepłej wody użytkowej. Algorytm został oparty na metodzie brzegowych równań całkowych. W publikacji przedstawiono praktyczny przykład zastosowania metody, w którym obliczono pole temperatury oraz rozkład gęstości strumienia ciepła dla przewodu c.w.u. izolowanego termicznie oraz dla przewodu bez izolacji termicznej. W pracy wyznaczono błąd metody brzegowych równań całkowych. Do analiz opracowano oprogramowanie w języku Fortran.

## **Computer simulation of heat transfer in walls with hot water installations using Boundary Element Method**

### Summary

The paper presents the numerical simulation of of heat transfer in walls with hot water installations using Boundary Element Method in two dimensional problem. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests and were compared with thermogram. This algorithm can be used to project increase efficiency a hot water transport in system pipe. A numerical examples are presented. Computer programs are written in Fortran programming languages.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (nr umowy WIEM/POKL/MD/II/2010/6).